JOURNAL OF ALGEBRA 21, 353–377 (1972)

Nodale nichtkommutative Jordanalgebren und Lie-Algebren bei Charakteristik $p > 2$

HELMUT STRADE

Mathematisches Seminar der Universität, 2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67–69, West-Deutschland

Received April 15, 1970

In dieser Arbeit soll eine Klasse $\mathscr{K}$ von Algebren der folgenden Art untersucht werden: Jede Algebra A von $\mathscr{K}$ der Dimension p^n über einem Körper K mit Char. $K = p > 2$ läßt sich auf die folgende Weise darstellen: Sei $B_n = K[x_1, ..., x_n]$, $x_i^p = 0$, ein reduzierter Polynomring. Man schreibe $f \circ g$ für das kommutative und assoziative Produkt in B_n. Dann sei A definiert als der Vektorraum B_n mit der Multiplikation

$$fg := f \circ g + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ c_{ij}, \tag{1}$$

wo $c_{ij}(= -c_{ji})$ beliebige Elemente von B_n sind mit der einzigen Bedingung, daß wenigstens eines nicht nilpotent ist. $\mathscr{K}$ besteht aus nodalen nichtkommutativen Jordanalgebren [5, 6, 9].

In I untersuchen wir die Ideale dieser Algebren. In II ordnen wir denjenigen Algebren A von $\mathscr{K}$, für die A^- eine Liealgebra ist, (nichtklassische) Unteralgebren von Jacobson–Witt-Algebren zu, und untersuchen, wieweit sich die Idealstruktur auf diese Liealgebren überträgt. In III wird ein Algebrenprodukt der Algebren von $\mathscr{K}$ definiert. Dies wird benutzt, um zu zeigen, daß es für jede natürliche Zahl q eine einfache Liealgebra gibt, die eine Cartan-Unteralgebra $\tilde{H}_q$ enthält mit $\tilde{H}_q^{[q]} \neq 0$. Schließlich wird für die Algebren von $\mathscr{K}$ ein Konstruktionsverfahren angegeben. Dies liefert u.a. einen konstruktiven Beweis dafür, daß sich jede Liealgebra E mit $EE = E$ und Zentr. $E = 0$ in eine Jacobson–Witt-Algebra $W_{\dim E}$ einbetten läßt.

In die vorliegende Arbeit sind einige dankenswerte Bemerkungen des Referenten R. D. Block aufgenommen worden.

I.

Aus (1) erhält man

$$2c_{ij} = x_i x_j - x_j x_i, \qquad \tfrac{1}{2}(fg + gf) = f \circ g.$$

481/21/3-1

Also ist die kommutative Algebra A^+ assoziativ. Die Multiplikation in A^- wird definiert durch

$$[f, g] = fg - gf.$$

Falls A^- Liealgebra ist, heißt A Lie-zulässig. Ein brauchbares Kriterium liefert

LEMMA 1. *A^- ist genau dann Lie-Algebra, wenn die Jacobi-Identität für ein Erzeugendensystem (x_i) gilt.*

Beweis. Nach [9, S. 318] ist A^- genau dann Liealgebra, wenn

$$\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_t} \circ c_{tk} + \frac{\partial c_{jk}}{\partial x_t} \circ c_{ti} + \frac{\partial c_{ki}}{\partial x_t} \circ c_{tj} \right) = 0$$

gilt. Nach (1) ist dies genau die Jacobi-Identität

$$[[x_i, x_j], x_k] + [[x_j, x_k], x_i] + [[x_k, x_i], x_j] = 0.$$

DEFINITION 1. (a) Sei V Untervektorraum von B_n. Dann bezeichne

$$\begin{aligned} V^1 &:= V, & V^{n+1} &:= V^n \circ V, \\ V^{(0)} &:= V, & V^{(n+1)} &:= [V^{(n)}, V^{(n)}] \\ V^{[0]} &:= V, & V^{[n+1]} &:= [V^{[n]}, V]. \end{aligned}$$

(b) $K_i[x_1, ..., x_n] := (\prod_{j=1}^n x_j^{s_j}, 0 \leqslant s_j \leqslant p - 1, \sum_{j=1}^n s_j \geqslant i)$. Dabei bezeichne $(u_1, ..., u_r)$ den durch die u_i aufgespannten Vektorraum und "$\prod$" bedeute das kommutative Produkt "$\circ$".

(c) Der Grad eines Polynoms P wird definiert durch

$$Gr\, 0 := \infty, \qquad Gr\, P := i \Longleftrightarrow P \in N^i, \quad P \notin N^{i+1} \quad \text{für} \quad P \neq 0$$

(N das Radikal von B_n).

Unmittelbar folgt

$$\begin{aligned} &Gr(f \circ g) \geqslant Gr\, f + Gr\, g \\ &Gr\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \geqslant Gr\, f - 1 \qquad (2) \\ &Gr([f, g]) \geqslant Gr\, f + Gr\, g - 2. \end{aligned}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel liefert der

SATZ 1. (*N. Jacobson*) *Seien $u_1, \ldots, u_n \in N$ Polynome von B_n und*

$$S: \begin{array}{c} B_n \to B_n \\ \sum_{(s_i)} C((s_i)) \prod_{i=1}^{n} x_i^{s_i} \mapsto \sum_{(s_i)} C((s_i)) \prod_{i=1}^{n} u_i^{s_i}. \end{array}$$

S ist genau dann ein Automorphismus von B_n, wenn die induzierte Abbildung $N/N^2 \to N/N^2$ nichtsingulär ist.

Der *Beweis* ist eine direkte Folge von [4, S. 108].

Da A flexibel ist, gilt

$$[f, g \circ h] = [f, g] \circ h + g \circ [f, h] \qquad \text{für alle} \quad f, g, h \in A, \tag{3}$$

d.h. $L^-(f) \in \mathrm{Der}(A^+)$ für alle $f \in A$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 4(f, g, h) &= 4(fg)h - 4f(gh) = 4(f \circ g)h + 2[f, g]h - 4f(g \circ h) - 2f[g, h] \\ &= 4f \circ g \circ h + 2[f \circ g, h] + 2[f, g] \circ h + [[f, g], h] - 4f \circ g \circ h \\ &\quad - 2[f, g \circ h] - 2f \circ [g, h] - [f, [g, h]] = 2f \circ [g, h] \\ &\quad + 2[f, h] \circ g + 2[f, g] \circ h + [[f, g], h] - 2g \circ [f, h] - 2[f, g] \circ h \\ &\quad - 2f \circ [g, h] - [f, [g, h]] = [[f, g], h] - [f, [g, h]]. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$\text{Zentr. } A := \{f \in A / [f, A] = (f, A, A) = (A, f, A) = (A, A, f) = 0\}$$

folgt aus der obigen Rechnung Zentr. $A = \{f \in A / [f, A] = 0\}$. Falls A einfach ist, gilt nach [9, S. 324] Zentr. $A = K1$.

Nach Kokoris [6] definiert man eine antisymmetrische Bilinearform F durch

$$[f, g] = F(f, g)\, 1 + W(f, g), \qquad W(f, g) \in N.$$

Falls $f \in N^2$ oder $g \in N^2$ gilt, folgt aus (2), daß $[f, g]$ nilpotent ist und also $F(f, g) = 0$. F induziert eine antisymmetrische Bilinearform auf $N/N^2 \times N/N^2$. Es gilt Rang $F = 2r \leqslant n$.

Zu einer genauen Untersuchung von A kommt es darauf an, für die einzelnen Fragestellungen passende Erzeugendensysteme zu konstruieren (d.h. geeignete Automorphismen von $A^+ = B_n$ zu finden). Jedenfalls kann man Erzeugende (u_i) finden, so daß

$$\begin{aligned} F(u_{2i-1}, u_{2i}) &= 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant r \\ F(u_i, u_j) &= 0 \qquad \text{sonst} \end{aligned}$$

gilt. Ein solches Erzeugendensystem wird kanonisch genannt.

LEMMA 2. *Seien $f, g \in N$, $[f, g]$ invertierbar. Dann gibt es $u_3, \ldots, u_n$, so daß $f, g, u_3, \ldots, u_n$ ein kanonisches Erzeugendensystem bilden.*

Beweis. f, g sind linear unabhängig modulo N^2. Denn sonst gilt $g = sf + h$, $s \in K$, $h \in N^2$ und $[f, g] = [f, h] \in N$ nach (2). Also gibt es $u_3, \ldots, u_n$, so daß $f, g, u_3, \ldots, u_n$ linear unabhängig sind modulo N^2 (d.h. ein Erzeugendensystem bilden) und außerdem kanonisch sind.

Wir untersuchen die Struktur der Ideale von A.

DEFINITION 2. Sei $\mathscr{D}$ eine Menge von Derivationen von A. Ein Ideal S von A heißt $\mathscr{D}$-invariant, wenn die Derivationen von $\mathscr{D}$ S in sich abbilden.

Da jedes echte Ideal von A Nilideal ist, ist mit S_1 und S_2 auch $S_1 + S_2$ echtes $\mathscr{D}$-invariantes Ideal. Es folgt

SATZ 2. *Zu einer Menge $\mathscr{D}$ von Derivationen von A gibt es genau ein größtes $\mathscr{D}$-invariantes Ideal $G(\mathscr{D})$ von A. $G(\mathscr{D})$ enthält alle echten Ideale, die $\mathscr{D}$-invariant sind.*

Die Ideale $G(\mathscr{D})$ lassen sich näher bestimmen.

LEMMA 3. *Sei $G(\mathscr{D})$ das größte $\mathscr{D}$-invariante Ideal von A. Dann gilt*

$$A/G(\mathscr{D}) \in \mathscr{K}.$$

Beweis. 1) Wegen $D(G(\mathscr{D})) \subset G(\mathscr{D})$ für alle $D \in \mathscr{D}$ induziert $\mathscr{D}$ eine Menge $\mathscr{D}'$ von Derivationen von $A/G(\mathscr{D})$. Sei $I \subset A/G(\mathscr{D})$ $\mathscr{D}'$-invariantes Ideal $\neq A/G(\mathscr{D})$. Dann ist $S_I := \{f \in A / f + G(\mathscr{D}) \subset I\}$ $\mathscr{D}$-invariantes Ideal von A, also gilt $S_I \subset G(\mathscr{D})$, d.h. $I = 0$. Also ist $A/G(\mathscr{D})$ *$\mathscr{D}'$-einfach.*

2) Man betrachte die kommutative assoziative Algebra $B := (A/G(\mathscr{D}))^+$. Die Menge $\tilde{\mathscr{D}} := \mathscr{D} \cup \{L^-(f), f \in A\}$ von Derivationen von A^+ induziert eine Menge $\bar{\mathscr{D}} := \mathscr{D}' \cup \{L^-(f'), f' \in A/G(\mathscr{D})\}$ von Derivationen von B. Sei $T \neq B$ $\bar{\mathscr{D}}$-invariantes Ideal von B. Es gilt also

$$T \circ B \subset B, \text{ weil } T \text{ Ideal von } B \text{ ist,}$$
$$[T, B] \subset B, \text{ weil } T\ \bar{\mathscr{D}}\text{-invariant ist.}$$

Dann ist T aber $\mathscr{D}'$-invariantes Ideal von $A/G(\mathscr{D})$, d.h. $T = 0$. Also ist B *$\bar{\mathscr{D}}$-einfach.*

Da B außerdem eine Vektorraumzerlegung $B = K1 \oplus N_B$ besitzt, läßt sich ein Satz von Harper [6] anwenden[1], B ist reduzierter Polynomring. Da mit A auch $A/G(\mathscr{D})$ nodale nichtkommutative Jordan-algebra ist, folgt mit [6] die Behauptung.

[1] Man vergleiche auch BLOCK's Theorem über differentialeinfache Algebren.

LEMMA 4. *Seien $B_1 = K[x_1,\dots,x_n]$ und $B_2 = K[u_1,\dots,u_m]$ reduzierte Polynomringe und T Algebrenhomomorphismus von B_1 auf B_2. Dann gibt es $R \in \mathrm{Aut}(B_1)$ mit*

$$\mathrm{Kern}\ T = \sum_{i=1}^{n-m} R(x_i) \circ B_1 .$$

Beweis. 1) $T(N_{B_1}) = N_{B_2} \Rightarrow T(N_{B_1}^2) = N_{B_2}^2$. Also induziert T eine Abbildung $T' \in \mathrm{Hom}(N_{B_1}/N_{B_1}^2, N_{B_2}/N_{B_2}^2)$. Wegen $\dim(N_{B_1}/N_{B_1}^2) = n$, $\dim(N_{B_2}/N_{B_2}^2) = m$ gilt $\dim(\mathrm{Kern}\ T') = n - m$. Es gibt also in N_{B_1} Polynome y_i $(i = 1,\dots, n-m)$, die modulo $N_{B_1}^2$ linear unabhängig sind und für die $T'(y_i) = 0$ gilt. Hieraus folgt $T(y_i + N_{B_1}^2) \subset N_{B_2}^2$, also auch $T(y_i) \subset N_{B_2}^2$, $i = 1,\dots, n-m$.

Also gibt es Polynome $P_i(X_1,\dots,X_m)$ in m Unbestimmten ohne konstante und lineare Glieder mit $T(y_i) = P_i(u_1,\dots,u_m)$. Da T surjektiv ist, gibt es $f_1,\dots,f_m \in N_{B_1}$ mit $T(f_j) = u_j$. Man setze

$$z_i := y_i - P_i(f_1,\dots,f_m), \qquad i = 1,\dots, n-m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} T(z_i) &= T(y_i) - T(P_i(f_1,\dots,f_m)) \\ &= P_i(u_1,\dots,u_m) - P_i(T(f_1),\dots,T(f_m)) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $z_i \in \mathrm{Kern}\ T$, $\sum_{i=1}^{n-m} z_i \circ B_1 \subset \mathrm{Kern}\ T$.

2) Man ergänze $z_1,\dots,z_{n-m}$ zu einem Erzeugendensystem (z_i), $1 \leqslant i \leqslant n$. Die lineare Abbildung R definiert durch

$$R: \begin{array}{c} B_1 \to B_1 \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{s_i} \mapsto \prod_{i=1}^{n} z_i^{s_i} \end{array}$$

induziert eine Abbildung $R' : N_{B_1}/N_{B_1}^2 \to N_{B_1}/N_{B_1}^2$, die nach Konstruktion umkehrbar ist. Nach Satz 1 folgt $R \in \mathrm{Aut}(B_1)$, nach Definition gilt $R(x_i) = z_i$.

3) Eine Betrachtung der Basis bestehend aus den Monomen in $R(x_i)$ ergibt $\sum_{i=1}^{n-m} R(x_i) \circ B_1 = K_1[R(x_1),\dots, R(x_{n-m})] \circ K[R(x_{n-m+1}),\dots, R(x_n)]$. Für die Dimensionen gilt daher $p^n - p^m = \dim B_1 - \dim B_2 = \dim(\mathrm{Kern}\ T) \geqslant \dim(\sum_{i=1}^{n-m} R(x_i) \circ B_1) = (p^{n-m} - 1)\, p^m = p^n - p^m$. Also gilt die Behauptung. Aus beiden Lemmata ergibt sich

SATZ 3. *Zu jeder Menge $\mathscr{D}$ von Derivationen von A gibt es $R \in \mathrm{Aut}(A^+)$ und $r = r(\mathscr{D})$, $0 \leqslant r < n$, so daß gilt*

$$G(\mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{r(\mathscr{D})} R(x_i) \circ A = K_1[R(x_1),\dots, R(x_r)] \circ K[R(x_{r+1}),\dots, R(x_n)].$$

Speziell erhält man so eine Bestimmung für das größte Ideal G_A von A ($\mathscr{D} = \varnothing$) und das größte derivationsinvariante Ideal $G(\operatorname{Der} A)$.

KOROLLAR 1. *Sei F die durch die antikommutative Multiplikation definierte Bilinearform. Dann gilt*

$$\dim G_A \leqslant p^n - p^{\operatorname{Rang} F}.$$

Beweis. Sei $G_A = \sum_{i=1}^{r} R(x_i) \circ A$. Wegen $[G_A, A] \subset G \subset N$ gilt

$$F(R(x_i) + N^2, N/N^2) = 0 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

also $\operatorname{Rang} F \leqslant n - r$. Damit ergibt sich $\dim G_A = p^n - p^{n-r} \leqslant p^n - p^{\operatorname{Rang} F}$.
Dies liefert einen neuen Beweis für das schon bekannte Ergebnis

KOROLLAR 2. *Sei* $\operatorname{Rang} F = n$. *Dann ist A einfach.*

Aus den Idealen $G(\mathscr{D})$ können weitere konstruiert werden.

LEMMA 5. *Sei A nicht einfach. Dann enthält A die Ideale $G_A{}^i, i \geqslant 1$. Sie lassen sich darstellen als*

$$G_A{}^i = K_i[R(x_1),..., R(x_r)] \circ K[R(x_{r+1}),..., R(x_n)].$$

Für $i > 1$ ist $G_A{}^i$ nilpotent.

Beweis. a) $[G_A{}^i, A] \subset G_A^{i-1} \circ [G, A] \subset G_A^{i-1} \circ G_A = G_A{}^i$; $\quad G_A{}^i \circ A = G_A^{i-1} \circ G_A \circ A = G_A{}^i$.

b) Aus der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation "$\circ$" folgt $G_A{}^i = \{K_1[R(X_1),..., R(x_r)]\}^i \circ \{K[R(x_{r+1}),..., R(x_n)]\}^i$. Der zweite Faktor ist eine Algebra mit 1, ändert sich beim Potenzieren daher nicht. Der erste Faktor ändert sich auf die angegebene Weise.

c) Es wird gezeigt: $G_A{}^j G_A{}^i \subset G_A^{j+1}$ für $i > 1$.

$$G_A{}^j G_A{}^i \subset G_A^{j-1} \circ (G_A G_A{}^i) \subset G_A^{j-1} \circ (G_A G_A) \circ G_A^{i-1} \subset G_A^{j+i-2} \circ G_A \subset G_A^{j+1}.$$

G selbst braucht nicht nilpotent zu sein.

SATZ 4. *Sei A nicht einfach. Dann enthält A ein kleinstes Ideal M_A, welches in allen echten Idealen enthalten ist. Es gilt $M_A \circ M_A = [M_A, M_A] = 0$.*

Beweis. Sei S echtes Ideal von $A, f \in S$, $f \neq 0$. Definiere $f_0 := f$, $f_i := x_i^{s_i} \circ f_{i-1} (i > 0)$, wo s_i so gewählt ist, daß $f_i \neq 0$, aber $x_i \circ f_i = 0$ gilt. Da S Ideal von A ist, gilt $f_n \in S$. Nach Konstruktion folgt aus der Kommutativität und Assoziativität

$$x_k \circ f_n = 0 \quad (k = 1,..., n), \quad \text{d.h.} \qquad f_n = a \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}, \quad a \in K, \quad a \neq 0.$$

Also ist der Durchschnitt aller echten Ideale von A ein kleinstes Ideal $\neq 0$. Da $G_A{}^2$ nilpotent ist, enthält A ein Ideal I mit $II = 0$. M_A ist in I enthalten.

Q.E.D.

II

Im Folgenden werden die Algebren von $\mathscr{K}$ untersucht, für die A^- (d.h. der Vektorraum A mit der Multiplikation $[f, g] := fg - gf$) Lie-Algebra ist. Die Klasse der Lie-zulässigen Algebren von $\mathscr{K}$ werde mit $\mathscr{L}$ bezeichnet. Diese Algebren sind u.a. von Schafer [9] und Oehmke [7] untersucht worden.

Zunächst soll mit einer geeigneten Vektorraumzerlegung die derivierte Reihe von A^- untersucht werden.

In [7, Beweis zu Satz 1] ist eine Konstruktion angegeben, die die Existenz eines Erzeugendensystems der folgenden Art sicherstellt:

1) $[x_1, x_2] = 1 + x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ m, \qquad m \in A$

2) $[x_1, x_j] = x_2^{p-1} \circ m_j, \; [x_2, x_j] = x_1^{p-1} \circ m_j', \; m_j, m_j' \in A, \; j \neq 1, 2.$

Lemma 6. $\mathrm{ad}_A\, x_1 \circ x_2$ *ist halbeinfach mit Eigenwerten in* K_p.

Beweis.

$$[x_1 \circ x_2, x_1] = x_1 \circ [x_2, x_1] = x_1 \circ (-1 - x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ m) = -x_1$$

$$[x_1 \circ x_2, x_2] = x_2 \circ [x_1, x_2] = x_2 \circ (1 + x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ m) = x_2$$

$$[x_1 \circ x_2, x_j] = x_2 \circ [x_1, x_j] + x_1 \circ [x_2, x_j] = x_2 \circ (x_2^{p-1} \circ m_j) + x_1 \circ (x_1^{p-1} \circ m_j') = 0.$$

Die Erzeugenden des Systems sind Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_A\, x_1 \circ x_2$ mit Eigenwerten in K_p. Da nach I (3) $\mathrm{ad}_A\, x_1 \circ x_2$ Derivation von A^+ ist, ist ein Monom $\prod_{i=1}^n x_i{}^{t_i}$ Eigenvektor zum Eigenwert $(t_2 - t_1)$. Damit ist eine Eigenvektorbasis von A angegeben.

A läßt sich in Eigenmoduln bez. $\mathrm{ad}_A\, x_1 \circ x_2$ zerlegen, $A = \bigoplus_{i \in K_p} A_i$, wo A_i der Eigenraum zum Eigenwert i ist. Da $\mathrm{ad}_A\, x_1 \circ x_2$ Derivation von A^- und A^- ist, gilt $[A_i, A_j] \subset A_{i+j}$, $A_i \circ A_j \subset A_{i+j}$.

Lemma 7. $A_i \subset A^{(2)}$ *für* $i \neq 0$.

Beweis.

$$[x_1{}^2 \circ x_2, x_2] = 2x_1 \circ x_2 \circ [x_1, x_2] = 2x_1 \circ x_2 \circ (1 + x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ m) = 2x_1 \circ x_2,$$

also gilt $x_1 \circ x_2 \in A^{(1)}$. Für $i \neq 0$ folgt $A_i = \mathrm{ad}_A{}^2\, x_1 \circ x_2(A_i) \subset A^{(2)}$.

LEMMA 8. $A_0 \subset x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0 + [A_{-1}, A_1]$.

Beweis. Nach dem Beweis von Lemma 6 gilt

$$A_0 = \left((x_1 \circ x_2)^s \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i},\ 0 \leqslant s,\ t_i \leqslant p-1\right), \qquad x_1 \in A_{-1},$$

$$\left(x_1{}^s \circ x_2^{s+1} \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i},\ 0 \leqslant s,\ t_i \leqslant p-1\right) \subset A_1 .$$

$$[A_{-1}, A_1] \ni \left[x_1, x_1{}^s \circ x_2^{s+1} \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i}\right]$$

$$= (s+1)\, x_1{}^s \circ x_2{}^s \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i} \circ (1 + x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ m) + x_1{}^s \circ x_2^{s+1} \circ \left[x_1, \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i}\right]$$

$$= (s+1)\, x_1{}^s \circ x_2{}^s \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i} + (s+1)\, x_1^{p-1+s} \circ x_2^{p-1+s} \circ m \circ \prod_{i=3}^{n} x_i^{t_i}$$

Der dritte Term verschwindet, da in ihm nach Wahl des Erzeugendensystems ein Faktor $x_2{}^p$ auftritt. Wegen $x_1^{p-1+s} \circ x_2^{p-1+s} \circ m \circ \prod_{i=3}^{n} x_i{}^{t_i} \in x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0$ folgt die Behauptung.

SATZ 5. *Sei $A \in \mathscr{L}$, A nicht notwendig einfach. Dann gilt*

$$A^{(2)} = A^{(1)}.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen der Lemmata gilt $A = \bigoplus_{i \in K_p} A_i$,

$$A^{(1)} = [A_0, A_0] + \sum_{i \neq 0} [A_0, A_i] + \sum_{i,j \neq 0} [A_i, A_j] \subset A_0^{(1)}$$

$$+ \sum_{i \neq 0} A_i + \sum_{i \neq 0} [A_i, A_{-i}] \subset A_0^{(1)} + A^{(2)}.$$

Es muß also nur $A_0^{(1)} \subset A^{(2)}$ gezeigt werden.

$$A_0^{(1)} \subset (x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0)^{(1)} + ([A_{-1}, A_1])^{(1)} + [x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0, [A_{-1}, A_1]]$$

Der zweite Term liegt in $A^{(2)}$, ebenso der dritte wegen

$$[x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0, [A_{-1}, A_1]] \subset [A_0, [A_{-1}, A_1]] \subset [A_{-1}, A_1]$$

Schließlich gilt wegen $[x_1 \circ x_2 , A_0] = 0$

$$[x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0 , x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0] = x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ [A_0 , x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ A_0]$$
$$= x_1^{2p-2} \circ x_2^{2p-2} \circ A_0^{(1)}.$$

Dies verschwindet wegen $2p - 2 > p$, $x_1^{2p-2} \circ x_2^{2p-2} = 0$. Q.E.D.

Speziell ist A^- weder nilpotent noch auflösbar.

KOROLLAR 1. *$A^{(1)}$ enthält ein Erzeugendensystem von A. Es gilt $A = A^{(1)} + N^4$.*

Beweis. Nach Lemma 7 und 8 gilt $A_i \subset A^{(1)}$ für $i \neq 0$ und $A_0 \subset A^{(1)} + N^4$ (weil $p > 2$), also $A \subset A^{(1)} + N^4$.

Sei (x_i) $i = 1,\ldots, n$ ein Erzeugendensystem von A. Dann gibt es Polynome $P_i \in N^4$ mit $z_i := x_i + P_i \in A^{(1)}$. Nach I Satz 1 ist (z_i) ein Erzeugendensystem von A in $A^{(1)}$.

KOROLLAR 2. Zentr. $A^{(1)} = A^{(1)} \cap$ Zentr. A.

Beweis. Zentr. $A^{(1)} = \{f \in A^{(1)} / [f, P] = 0$ für alle $P \in A^{(1)}\}$.

a) Trivial gilt $A^{(1)} \cap$ Zentr. $A \subset$ Zentr. $A^{(1)}$.

b) Sei (z_i) ein Erzeugendensystem von A in $A^{(1)}$, $f \in$ Zentr. $A^{(1)}$, also $[f, z_i] = 0$ für alle i. Dann gilt $[f, \prod_{i=1}^n z_i^{s_i}] = 0$, $[f, A] = 0$, nach S. 3 also $f \in$ Zentr. A.

Die Rechnung S. 3 zeigt zusammen mit Satz 5, daß Kommutator und Assoziator von A mit $A^{(1)}$ übereinstimmen. Also gibt es genau dann auf A eine assoziative Linearform $\neq 0$, wenn $A^{(1)} \neq A$ gilt. Für einfache Algebren gilt zusätzlich zu Satz 5

SATZ 6. *Sei $A \in \mathscr{L}$, A einfach. Dann gilt*

$$A^{(1)} = A \qquad \textit{oder} \qquad \operatorname{Codim}_A A^{(1)} = 1.$$

Beweis. Sei $A^{(1)} \neq A$ und V ein linearer Raum mit $A^{(1)} \subset V \neq A$. Eine Basis von V ergänze man zu einer Basis von A durch geeignete Polynome $P_1 ,\ldots, P_m$: $A = V \oplus KP_1 \oplus \cdots \oplus KP_m$.

Auf A definieren wir eine Linearform l durch

$$l(V) = 0, \qquad l(P_1) = 1, \qquad l(P_i) = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq 1.$$

Wegen $l(A^{(1)}) = l(V) = 0$ ist l assoziative Linearform. Man betrachte den zugehörigen Bilinearkern $\mathrm{Bk}(l) := \{f \in A / l(fg) = 0$ für alle $g \in A\} =$

$\{f \in A / l(f \circ g) = 0$ für alle $g \in A\}$. Wegen $l \neq 0$ gilt $\mathrm{Bk}(l) \neq A$, aus der Einfachheit von A folgt $\underline{\mathrm{Bk}(l) = 0}$.

Sei (x_i) ein Erzeugendensystem von A. Falls $\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \in V$ gilt, folgt (wegen $(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}) \circ N = 0)$ $\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \in \mathrm{Bk}(l)$, ein Widerspruch. Also gilt $A^{(1)} + K \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} = A$. Q.E.D.

Der Beweis bleibt offenbar richtig, wenn $A \in \mathscr{K}$ gilt.

Speziell folgt für eine einfache Algebra $A^{(1)} = A$, wenn für ein Erzeugendensystem $\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \in A^{(1)}$ gilt.

Schafer ist bei der Untersuchung gewisser Liealgebren auf die Algebren von $\mathscr{L}$ geführt worden [9]. Er ordnete jeder Blockschen Liealgebra $L(G, \delta, f)$ eine Algebra A von $\mathscr{L}$ zu. Diese Algebra ist einfach, wenn $L(G, \delta, f)$ einfach ist, und es gilt dann $(A/K1)^{(1)} \simeq L(G, \delta, f)$.

Wir werden zeigen, daß man umgekehrt jeder Algebra von $\mathscr{L}$ in geeigneter Weise eine Liealgebra zuordnen kann, die genau dann einfach ist, wenn die Ausgangsalgebra einfach ist. In diesem Falle ist die Zuordnung genau die Umkehrung der Schafer'schen, d.h. sie spezialisiert sich zu der Abbildung

$$A \to (A/K1)^{(1)},$$

wenn A einfach ist.

Definition 3. Sei $A \in \mathscr{L}$, $L(A) := A^{(1)}/\mathrm{Zentr.}\, A^{(1)}$

Satz 7. *Es gilt*

1) $[L(A), L(A)] = L(A)$
2) $\mathrm{Zentr.}(L(A)) = \{0\}$
3) $L(A) \simeq \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)} \simeq (\mathrm{ad}_A A)^{(1)}$
4) *Falls A einfach ist, gilt* $L(A) \simeq (A/K1)^{(1)}$.

Beweis. 3) Wegen $(\mathrm{ad}_A A)^{(1)} = \mathrm{ad}_A A^{(1)}$ ist nur $\mathrm{ad}_A A^{(1)} \simeq \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)}$ zu zeigen. Durch die Abbildung

$$T : \begin{array}{l} \mathrm{ad}_A A^{(1)} \to \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)} \\ \mathrm{ad}_A f \mapsto \mathrm{ad}_{A^{(1)}} f \end{array}$$

ist ein Homomorphismus der Liealgebren gegeben, T ist surjektiv. T ist injektiv: $\mathrm{ad}_{A^{(1)}} f = 0 \Rightarrow f \in \mathrm{Zentr.}\, A^{(1)} \subset \mathrm{Zentr.}\, A \Rightarrow \mathrm{ad}_A f = 0$.

2) Wir zeigen: $\mathrm{Zentr.}(\mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)}) = \{0\}$.

$$\mathrm{ad}_{A^{(1)}} f \in \mathrm{Zentr.}(\mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)}) \Rightarrow 0 = [\mathrm{ad}_{A^{(1)}} f, \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)}] = \mathrm{ad}_{A^{(1)}}[f, A^{(1)}]$$
$$\Rightarrow [f, A^{(1)}] \subset \mathrm{Zentr.}\, A^{(1)}.$$

Wegen Satz 5 zieht dies $[f, A^{(1)}] = [f, [A^{(1)}, A^{(1)}]] \subset [[f, A^{(1)}], A^{(1)}] = 0$ nach sich, d.h. $f \in$ Zentr. $A^{(1)}$ und $\mathrm{ad}_{A^{(1)}} f = 0$.

1) Wegen $(\mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)})^{(1)} = \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(2)} = \mathrm{ad}_{A^{(1)}} A^{(1)}$ gilt $(L(A))^{(1)} = L(A)$.

4) Sei A einfach. Dann gilt Zentr. $A = K1$, also folgt

$$L(A) \simeq (\mathrm{ad}_A A)^{(1)} \simeq (A/K1)^{(1)}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Zu einer weiteren Untersuchung betrachten wir die Ideale von A und $L(A)$. Es bezeichne

$S(S')$ die Menge der (echten) Ideale von A
$I(I')$ die Menge der (echten) Ideale von $L(A)$
k den kanonischen Homomorphismus $A^- \dashrightarrow A^-/\text{Zentr. } A^{(1)}$
P die Projektion von A nach N, $P(a1 + n) := n$
$S(f_1, \dots, f_m)$ das von $f_1, \dots, f_m \in A$ erzeugte Ideal von A.

Es definiert

$$\begin{aligned} \psi : \; & S \to I \\ & S \mapsto k(S \cap A^{(1)}) \end{aligned}$$

eine isotone Abbildung von S nach I und

$$\begin{aligned} \varphi : \; & I \to S \\ & I \mapsto (Pk^{-1}(I)) \circ A + [k^{-1}(I), A^{(1)}] \circ A \end{aligned}$$

eine isotone Abbildung von I nach S.

Die Isotonie der Abbildungen und die Wohldefiniertheit von ψ sind trivial. Es muß gezeigt werden, daß $\varphi(I)$ für $I \in I$ Ideal von A ist. Wegen der Assoziativität in A^+ ist es Ideal von A^+. Wegen $k([k^{-1}(I), A^{(1)}]) \subset [I, L(A)] \subset I$ gilt

$$[k^{-1}(I), A^{(1)}] \subset k^{-1}(I).$$

Nach Satz 5, Korollar 1 gibt es ein Erzeugendensystem (z_i) von A in $A^{(1)}$. Sei $f \in k^{-1}(I)$:

$$\left[f, \prod_{i=1}^{n} z_i^{s_i}\right] = \sum_j s_j [f, z_j] \circ \prod_{i=1}^{n} z_i^{s_i - \delta^{ji}}.$$

Hieraus folgt

$$[k^{-1}(I), A] \subset [k^{-1}(I), A^{(1)}] \circ A.$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} [\varphi(I), A] = {} & [Pk^{-1}(I) \circ A, A] \\ & + [[k^{-1}(I), A^{(1)}] \circ A, A] \subset \{Pk^{-1}(I) \circ A^{(1)} + [k^{-1}(I), A] \circ A\} \\ & + \{[k^{-1}(I), A^{(1)}] \circ A^{(1)} + [[k^{-1}(I), A^{(1)}], A] \circ A\} \subset \varphi(I) \\ & + [k^{-1}(I), A] \circ A \subset \varphi(I). \end{aligned}$$

Also ist $\varphi(I)$ Ideal von A^- und damit auch von A. Offenbar gilt $\psi(A) = L(A)$. $\varphi(L(A)) = A$ gilt, weil nach Korollar 1 zu Satz 5 $\varphi(L(A))$ $(\supset A^{(1)})$ ein Erzeugendensystem von A enthält. ψ und φ bilden sogar echte Ideale in echte Ideale ab. Zum Beweis benötigt man

LEMMA 9. *Sei $I \in I$, $\varphi(I) = A$. Dann gilt $I = L(A)$.*

Beweis. $M := \{P \in A^{(1)} / \exists P_1 \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)} : \mathrm{Gr}(P - P_1) > \mathrm{Gr}\, P\}$. Sei $M \neq A^{(1)}$ und $t := \mathrm{Min}\{\mathrm{Gr}\, Q / Q \in A^{(1)}, Q \notin M\}$.

a) Es wird gezeigt: $t > 2$.

Wegen $\varphi(I) = A$ gilt $[k^{-1}(I), A^{(1)}] \not\subset N$. Also gibt es $f \in k^{-1}(I)$, $g \in A^{(1)}$ mit $[f, g] = 1 + n$, $n \in N$. Wegen $1 \in k^{-1}(I)$ kann $f \in N$ gewählt werden. Nach Lemma 2 gibt es ein kanonisches Erzeugendensystem (u_i) mit $u_1 = f$, $u_2 = g$ (es gilt also $\mathrm{Gr}([u_1, u_i]) \geqslant 1$ für $i \neq 2$). Wegen $A = A^{(1)} + N^4$ (Korollar 1 zu Satz 5), $[A, N^4] \subset N^3$ und $[k^{-1}(I), A^{(1)}] \subset k^{-1}(I)$ (s.o.) gibt es zu $h \in k^{-1}(I)$, $l \in A$ ein Polynom $P(h, l) \in A^{(1)}$, $\mathrm{Gr}(P(h, l)) \geqslant 3$ mit $[h, l] + P(h, l) \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$. Es folgt

(i) $[u_1, u_2] = 1 + n \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$.

(ii) $i \neq 2 : [u_1, u_2 \circ u_i] = (1 + n) \circ u_i + u_2 \circ [u_1, u_i] \equiv u_i (N^2)$, da (u_i) kanonisch ist. Also gibt es Polynome P_i', $\mathrm{Gr}\, P_i' \geqslant 2$, so daß $[u_1, u_2 \circ u_i] = u_i + P_i'$ gilt. Es folgt

$$u_i + P_i \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)} \qquad \text{mit} \qquad P_i := P(u_1, u_2 \circ u_i) + P_i', \ \mathrm{Gr}\, P_i \geqslant 2.$$

$[u_1, u_2^2] = 2u_2 \circ (1 + n) \equiv 2u_2 (N^2)$. Also gibt es P_2, $\mathrm{Gr}\, P_2 \geqslant 2$, $u_2 + P_2 \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$.

(iii)
$$\begin{aligned} i, j \neq 2 : [u_1, u_2 \circ u_i \circ u_j] &= (1 + n) \circ u_i \circ u_j + u_2 \circ [u_1, u_i \circ u_j] \\ &\equiv u_i \circ u_j (N^3) \\ j \neq 2 : [u_1, u_2^2 \circ u_j] &\equiv 2u_2 \circ u_j (N^3) \end{aligned}$$

Also gibt es Polynome P_{ij}, $\mathrm{Gr}\, P_{ij} \geqslant 3$, so daß gilt $u_i \circ u_j + P_{ij} \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$ für $(i, j) \neq (2, 2)$.

$[u_1 \circ u_2 + P_{12}, u_2^2] = 2u_2^2 \circ (1 + n) + [P_{12}, u_2^2] \equiv 2u_2^2 (N^3)$, also gibt es P_{22}, $\mathrm{Gr}\, P_{22} \geqslant 3$ mit $u_2^2 + P_{22} \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$.

Also gilt $t > 2$.

b) Das Minimum t wird angenommen von einem Polynom $Q_0 : Q_0 \in A^{(1)}, Q_0 \notin M$, $\mathrm{Gr}\, Q_0 = t$. Wegen $A^{(1)} = A^{(2)}$ gibt es eine Darstellung

$$Q_0 = \sum_i [A_i, B_i], \qquad A_i, B_i \in A^{(1)}.$$

Falls $\mathrm{Gr}\, A_i < t$ gilt, gibt es $P_{i1} \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$ mit $\mathrm{Gr}(A_i - P_{i1}) > \mathrm{Gr}\, A_i$ nach Wahl von t. Sukzessive gibt es $P_{il} \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$ mit

$$\mathrm{Gr}\left(A_i - \sum_l P_{il}\right) \geqslant t.$$

Man setze

$$A_i'' := A_i - \sum_l P_{il}, \qquad A_i' := \sum_l P_{il}$$

und erhält eine Zerlegung von A_i

$$A_i = A_i' + A_i'', \quad A_i' \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}, \quad \mathrm{Gr}(A_i'') \geqslant t, \quad A_i'' = A_i - A_i' \in A^{(1)}.$$

Entsprechend gibt es eine Zerlegung von B_i. Also gilt

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_i [A_i, B_i] \\ &= \sum_i [A_i', B_i'] + \sum_i [A_i'', B_i'] + \sum_i [A_i', B_i''] + \sum_i [A_i'', B_i'']. \end{aligned}$$

Wegen $A_i', B_i' \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$ und $A_i'', B_i'' \in A^{(1)}$ liegen die ersten drei Summanden in $k^{-1}(I) \cap A^{(1)}$. Aus der Gradrelation $I(2)$ folgt

$$\mathrm{Gr}([A_i'', B_i'']) \geqslant \mathrm{Gr}(A_i'') + \mathrm{Gr}(B_i'') - 2 \geqslant 2t - 2 > t.$$

Dies widerspricht der Wahl von Q_0. Also gilt $M = A^{(1)}$.

c) Sei $A^{(1)} \not\subset k^{-1}(I)$, $r := \mathrm{Max}\{\mathrm{Gr}\, Q / Q \in A^{(1)},\ Q \notin k^{-1}(I)\}$. Dieses Maximum wird von einem Polynom Q_1 angenommen.

$$\begin{gathered} Q_1 \in A^{(1)} = M \Rightarrow \exists P \in k^{-1}(I) \cap A^{(1)} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Gr}(Q_1 - P) > \mathrm{Gr}\, Q_1 . \\ Q_1 - P \in A^{(1)},\ \mathrm{Gr}(Q_1 - P) > r \Rightarrow Q_1 - P \in k^{-1}(I) \Rightarrow Q_1 \in k^{-1}(I), \end{gathered}$$

ein Widerspruch. Also gilt $A^{(1)} \subset k^{-1}(I)$ und $L(A) = I$. Q.E.D.

LEMMA 10. a) *ψ ist Abbildung $S' \to I'$.*

b) *φ ist Abbildung $I' \to S'$.*

c) *Es gilt $I \subset k((\varphi(I) + K1) \cap A^{(1)})$ für $I \in I$.*

Beweis. a) Sei $S \in S' \neq \varnothing$.

(i) $\psi(S) = \{0\}$. Dann gilt wegen der Isotonie von ψ für das kleinste Ideal M von A $\psi(M) = \{0\}$, d.h.

$$k(M \cap A^{(1)}) = \{0\}, \quad M \cap A^{(1)} \subset \mathrm{Zentr.}\, A^{(1)} \subset \mathrm{Zentr.}\, A.$$

Es folgt $[M, A^{(1)}] \subset [[M, A], A] \subset [\text{Zentr. } A, A] = \{0\}$. Mit $M \circ A \subset M$ ergibt sich $\{0\} = [M, A^{(1)}] \supset [M \circ A, A^{(1)}] = M \circ [A, A^{(1)}] = M \circ A^{(1)}$. (Dabei wurde bei der vorletzten Gleichung $[M, A^{(1)}] = \{0\}$ und bei der letzten Satz 5 verwendet.) Da $A^{(1)}$ nach Vorraussetzung invertierbare Elemente enthält, folgt $M = \{0\}$, ein Widerspruch.

(ii) $\psi(S) = L(A)$. Wegen der Isotonie von ψ gilt für das größte Ideal G von A $\psi(G) = L(A)$. Es folgt

$$A^{(1)} \subset G \cap A^{(1)} + \text{Zentr. } A^{(1)} \subset G \oplus K1,$$
$$A^{(1)} = [A^{(1)}, A^{(1)}] \subset [G \oplus K1, A^{(1)}] \subset G \subset N, \text{ ein Widerspruch.}$$

(b) Sei $I \in I$. $\varphi(I) = \{0\} \Rightarrow Pk^{-1}(I) = \{0\} \Rightarrow k^{-1}(I) \subset K1 \Rightarrow I = \{0\}$ $\varphi(I) = A \Rightarrow I = L(A)$ nach Lemma 9.

(c) Aus den Definitionen folgt $I \subset k(Pk^{-1}(I) \oplus K1)$, also gilt

$$I \subset k(\varphi(I) + K1) \cap L(A) = k((\varphi(I) + K1) \cap A^{(1)}). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Eine Liealgebra heiße *halbeinfach*, wenn sie keine echten abelschen Ideale enthält. Dann gilt

SATZ 8. *Sei $A \in \mathscr{L}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) *A ist einfach*

(2) *A enthält keine echten abelschen Ideale*

(3) *$L(A)$ ist einfach*

(4) *$L(A)$ ist halbeinfach.*

Beweis. (2) $\Leftrightarrow$ (1) nach I Satz 4
(1) $\Leftrightarrow$ (3) nach Lemma 10
(3) $\Rightarrow$ (4) ist trivial
(4) $\Rightarrow$ (2) : A enthalte ein echtes abelsches Ideal $S \Rightarrow \psi(S)$ ist echtes Ideal von $L(A)$ mit $[\psi(S), \psi(S)] \subset [k(S), k(S)] = k([S, S]) = 0$.
Q.E.D.

SATZ 9. *Sei $A \in \mathscr{L}$, A nicht einfach. Dann enthält $L(A)$ das größte Ideal $((G_A \oplus K1) \cap A^{(1)})/\text{Zentr. } A^{(1)}$, welches alle echten Ideale von $L(A)$ enthält. Es gilt*

$$L(A)/\{(G_A \oplus K1) \cap A^{(1)}/\text{Zentr. } A^{(1)}\} \simeq L(A/G_A).$$

Beweis.

(a) $((G_A \oplus K1) \cap A^{(1)})/\text{Zentr. } A^{(1)}$ ist Ideal von $L(A)$, weil $G_A \oplus K1$ Ideal von A^- ist. Falls $((G_A \oplus K1) \cap A^{(1)}/\text{Zentr. } A^{(1)} = L(A)$ gilt, folgt

$A^{(1)} \subset (G_A \oplus K1) + \text{Zentr.}\, A^{(1)}$, also $A^{(1)} = [A^{(1)}, A^{(1)}] \subset [A^{(1)}, G_A] \subset N_A$, ein Widerspruch.

(b) $I \in I' \Rightarrow \varphi(I) \in S' \Rightarrow \varphi(I) \subset G_A \Rightarrow I \subset k((G_A \oplus K1) \cap A^{(1)})$ nach Lemma 10. Also ist dies das größte Ideal von $L(A)$.

(c) Anwendung des zweiten Isomorphiesatzes ergibt mit der Bezeichnung $B := A/G_A$

$$B^-/K1_B \cong (A^-/G_A)/(G_A \oplus K1/G_A) \cong A^-/(G_A \oplus K1_A).$$

Nach Satz 7 folgt, da B einfach ist,

$$\begin{aligned} L(B) &\cong (B/K1_B)^{(1)} \cong (A/(G_A \oplus K1_A))^{(1)} = A^{(1)}/((G_A \oplus K1_A) \cap A^{(1)}) \\ &\cong (A^{(1)}/\text{Zentr.}\, A^{(1)})/\{(G_A \oplus K1_A) \cap A^{(1)}/\text{Zentr.}\, A^{(1)}\} \\ &= L(A)/\{(G_A \oplus K1_A) \cap A^{(1)}/\text{Zentr.}\, A^{(1)}\}. \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Über die Existenz eines kleinsten Ideales lassen sich keine Aussagen machen.

SATZ 10. *Sei $A \in \mathscr{L}$, A einfach,* dim $A = p^n$. *Dann gilt*

$$\dim L(A) = \begin{cases} p^n - 1 & \text{falls } A = A^{(1)} \quad \text{oder } 1 \notin A^{(1)} \\ p^n - 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Da A einfach ist, gilt Zentr. $A = K1$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 6 und Korollar 2 zu Satz 5.

Die Klasse dieser Liealgebren bezeichnen wir mit $\mathscr{P}$. Nach Schafer [9, Satz 7] in Verbindung mit Satz 7 sind die einfachen Blockschen Liealgebren isomorph zu Algebren von $\mathscr{P}$. Wir vergleichen $\mathscr{P}$ mit den klassischen Algebren (mit der Definition nach [10, S. 28]) bei Char. $K > 3$. Sei $L(A)$ eine (nicht notwendig einfache) Liealgebra von $\mathscr{P}$ und $L(A) = L_0 + \sum_{\alpha \in \Delta_1'} L_\alpha$, Δ_1' die Menge der Wurzeln $\neq 0$, eine Cartan-Zerlegung bezüglich der Cartan-Algebra L_0. Dann ist $k^{-1}(L_0)$ nilpotente Unteralgebra von A^-. A läßt sich in eine direkte Summe von Eigenmoduln bezüglich $k^{-1}(L_0)$ zerlegen:

$$A^- = \sum_{\alpha' \in \Delta_2} A_{\alpha'}, \ \alpha' \text{ Eigenwertverteilung auf } k^{-1}(L_0) \qquad \text{(s. [11])}.$$

Da ad f für alle $f \in A$ Derivation von A^- und A^+ ist, gilt

$$[A_{\alpha'}, A_{\beta'}] \subset A_{\alpha'+\beta'}, \qquad A_{\alpha'} \circ A_{\beta'} \subset A_{\alpha'+\beta'}.$$

Sei $A_{\alpha'} \subset N^2$ für alle $\alpha' \neq 0$. Dann enthält A_0 ein Erzeugendensystem von A, es folgt $A_0 = A$, d.h. $\text{ad}_A\, k^{-1}(L_0)$ ist nilpotent. Dann ist auch $\text{ad}_{L(A)} L_0$ nilpotent. Da L_0 Cartan-Algebra von $L(A)$ ist, folgt $L_0 = L(A)$, $L(A)$ nilpotent im Widerspruch zu Satz 5. Also gibt es eine Wurzel $\gamma' \neq 0$, so daß $A_{\gamma'}$ ein Polynom P enthält mit $\operatorname{Gr} P \leqslant 1$. Dann gilt $P^r \neq 0$ für $1 \leqslant r \leqslant p-1$, $P^r \in A_{r\gamma'}$. Also ist $r\gamma'$ Wurzel für $r \in K_p$.

Die Zerlegung von A^- bezüglich $k^{-1}(L_0)$ liefert nun (wegen $A_{\alpha'} \subset A^{(1)}$ für $\alpha' \neq 0$) eine Zerlegung von $L(A)$:

$$L(A) = k(A_0 \cap A^{(1)}) + \sum_{\alpha'} k(A_{\alpha'}).$$

Wegen Zentr. $A^{(1)} \subset A_0$ gilt $k(A_{\alpha'}) \neq 0$. Aus $[k^{-1}(L_0), A_{\alpha'}] \subset A_{\alpha'}$ folgt $[L_0, k(A_{\alpha'})] \subset k(A_{\alpha'})$ für $\alpha' \neq 0$. Da $\operatorname{ad}_{A_0} k^{-1}(L_0)$ nilpotent ist, ist auch $\operatorname{ad}_{k(A_0 \cap A^{(1)})} L_0$ nilpotent, also folgt $k(A_0 \cap A^{(1)}) = L_0$ aus der Maximalität von L_0. Also ist die vorliegende Zerlegung bereits die Ausgangszerlegung von $L(A)$. Also gibt es eine Wurzel $\gamma \in \Delta_1'$, so daß $k(A_{\gamma'}) = L_\gamma$. Nach Konstruktion gilt $L_{r\gamma} = k(A_{r\gamma'})$. Damit gibt es zu jeder Cartan-Zerlegung von $L(A)$ eine Wurzel $\gamma \neq 0$, so daß $r\gamma$ Wurzel ist für alle $r \in K_p$. Nach der Definition von [10] folgt hieraus

Satz 11. *Sei $L(A) \in \mathscr{L}$. Dann ist $L(A)$ nicht klassisch.*

Ref. [7] von R. H. Oehmke beschäftigt sich mit den einfachen Algebren von $\mathscr{L}$. Dabei sind einige Fehler aufgetreten, so daß die Ergebnisse nur für sehr spezielle Algebren von $\mathscr{L}$ bewiesen wurden.

1) Satz 1 (S. 417) soll die Existenz eines geeigneten Erzeugendensystems sicherstellen. Er lautet: Sei A eine einfache, Lie-zulässige nodale nicht-kommutative Jordanalgebra über einem Körper der Charakteristik $p \neq 2$. Wenn A^+ eine gerade Anzahl von Erzeugenden besitzt, kann man ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_{2r}$ wählen, daß gilt

$$\begin{aligned} [x_i, x_{i+r}] &= 1 + a_i x_i^{p-1} \circ x_{i+r}^{p-1}, \qquad i = 1, \ldots, r \\ [x_i, x_j] &= 0 \text{ sonst} \end{aligned} \tag{1}$$

mit $a_i \in K$.

Wenn A^+ eine ungerade Anzahl von Erzeugenden besitzt, kann man ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_{2r+1}$ wählen, so daß (1) erfüllt ist und

$$\begin{aligned} [x_{2r+1}, x_j] &= 0 \qquad j \neq r, 2r, \\ [x_{2r+1}, x_r] &= x_{2r}^{p-1} \circ \alpha(1 + \beta x_{2r+1}^{p-1}) \\ [x_{2r+1}, x_{2r}] &= x_r^{p-1} \circ (1 + \beta x_{2r+1}^{p-1}) \qquad \text{mit} \qquad \alpha, \beta \in K \quad \text{gilt.} \end{aligned} \tag{2}$$

Dieser Satz enthält zwei unabhängige Fehler.

a) Sei $n = 2r$. Man betrachte das Beispiel des folgenden Kapitels. Dort ist eine einfache Lie-zulässige Algebra $A \in \mathscr{L}$ angegeben mit $n = 4$, $\dim A = p^4$, $\operatorname{Rang} F = 2 \neq 4$. Falls A zu einer Algebra isomorph wäre mit einem Erzeugendensystem (1) müßte $\operatorname{Rang} F = 4$ gelten.

b) Sei $n = 2r + 1$. Die angegebene Konstruktion ist fehlerhaft. Die auf S. 422 Zeile 11 ausgeführte Wahl von δ ist nur möglich, falls die dort auftretende Konstante β nicht verschwindet.

2) Im Beweis von Satz 3 (S. 426) werden auf S. 425 in den Zeilen 25–30 Körperelemente in eine Polynomidentität eingesetzt. Das ist nicht zulässig, weil $x_i^p = 0$ gilt. Satz 3 ist trotzdem in der verschärften Fassung unserer Sätze 8 und 10 richtig.

3) Die in Satz 4 (S. 429) angegebenen Derivationen sind linear abhängig. Daher ist die Dimension von $\operatorname{Der} A$ falsch angegeben.

Beweis. Die Derivationsalgebra einer Algebra, die ein Erzeugendensystem (1) und (2) besitzt, besteht aus dem richtigen Teil des Beweises von Satz 4 aus den Abbildungen

$$f \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ a_i$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} + \gamma_j x_j^{p-1}\right) \circ [x_i, x_j] \qquad i = 1, \dots, 2r$$

$$a_{2r+1} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} + \gamma_j x_j^{p-1}\right) \circ [x_{2r+1}, x_j] + \delta(1 + \beta x_{2r+1}^{p-1}).$$

Dabei sind g, γ_j, δ beliebig wählbar. In anderer Schreibweise ergibt dies

$$\begin{aligned} f \mapsto & \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ [x_i, x_j] + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ x_j^{p-1} \circ [x_i, x_j] \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_{2r+1}} \delta \circ (1 + \beta x_{2r+1}^{p-1}) \\ = {} & [f, g] + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \gamma_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ x_j^{p-1} \circ [x_i, x_j] + \frac{\partial f}{\partial x_{2r+1}} \delta \circ (1 + \beta x_{2r+1}^{p-1}) \\ =: {} & D(g, \gamma_j, \delta)(f). \end{aligned}$$

Da $1 \in \operatorname{Zentr.} A$ und also $D(1, 0, 0) = 0$ gilt, folgt für die Dimension von $\operatorname{Der} A$

$$\dim(\operatorname{Der} A) \leq (p^n - 1) + n + 1 = p^n + n.$$

Ungleichheit gilt genau dann, wenn es eine weitere (nicht-triviale) Darstellung der O-Derivation gibt. Es gilt aber: $D := D(x_{2r+1}, \gamma_j, 0)$ mit $\gamma_r = -1$, $\gamma_{2r} = \alpha$, $\gamma_{2r+1} = -\beta$, $\gamma_j = 0$ sonst, ist O-Derivation. Zu zeigen ist $D(x_l) = 0$ für $l = 1, \ldots, 2r + 1$.

Für $l \neq r, 2r, 2r+1$ ist dies offenbar erfüllt (man berücksichtige (2)). Für $l = r, 2r, 2r+1$ liefert das eine einfache Rechnung. Also sind die in [7, Satz 4] angegebenen Derivationen linear abhängig. Die Teile der Arbeit von Goldmann [2], die sich auf diese Arbeit beziehen oder auf ihr aufbauen, müssen entsprechend geändert werden.

III

Für zwei Algebren $A_1, A_2 \in \mathscr{K}$ (über dem gleichen Grundkörper) wird ein Algebrenprodukt definiert als der Vektorraum $A_1^+ \otimes A_2^+$ (d.h. das Tensorprodukt der zugehörigen Vektorräume) mit einem Produkt definiert durch

$$(f_1, f_2)(g_1, g_2) := (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) + \tfrac{1}{2}\{([f_1, g_1], f_2 \circ g_2) + (f_1 \circ g_1, [f_2, g_2])\}.$$

Offenbar gilt $(A_1 \otimes A_2)^+ = A_1^+ \otimes A_2^+$ (das Tensorprodukt der assoziativen Algebren).

Das Einselement ist $(1, 1)$, die Menge der Nilpotenten wird gegeben durch

$$N_{A_1 \otimes A_2} = (N_{A_1} \otimes A_2) + (A_1 \otimes N_{A_2}).$$

(mit der Bezeichnung $(V_1 \otimes V_2) := \langle (f_1, f_2), f_i \in V_i \rangle$).

Man sieht dies sofort an der Definition der kommutativen Multiplikation. Also gibt es eine Vektorraumzerlegung

$$A_1 \otimes A_2 = K1 \oplus N_{A_1 \otimes A_2}$$

Für Derivationen D_i von A_i^+ sind

$$D_1 \otimes 1 : (f_1, f_2) \mapsto (D_1 f_1, f_2)$$
$$1 \otimes D_2 : (f_1, f_2) \mapsto (f_1, D_2 f_2)$$

Derivationen von $A_1^+ \otimes A_2^+$.

LEMMA 11. *Seien A_i^+ $\mathscr{D}_i$-einfache (assoziative) Algebren. Dann ist $A_1^+ \otimes A_2^+$ $\mathscr{D}$-einfach für $\mathscr{D} = \{D_1 \otimes 1 / D_1 \in \mathscr{D}_1\} \cup \{1 \otimes D_2 / D_2 \in \mathscr{D}_2\}$.*

Beweis. Sei $S \neq 0$ $\mathscr{D}$-invariantes Ideal von $A_1^+ \otimes A_2^+$. Ein Element f von S werde dargestellt durch $f = \sum_{i=1}^{l(f)} (x_i, y_i)$, wo die y_i linear unabhängig über K sind. $l(f)$ heiße die Länge von f.

a) Sei $f \neq 0$ ein Element mit minimalem $l(f)$. Da A_1^+ $\mathscr{D}_1$-einfach ist, gibt es $T_1, ..., T_r \in \{R_h^+, h \in A_1^+\} \cup \mathscr{D}_1$, mit $\prod_{i=1}^r T_i(x_1) = 1$. Man definiere

$$T_j' := \begin{cases} T_j \otimes 1 & \text{für} \quad T_j \in \mathscr{D}_1 \\ R^+(h, 1) & \text{für} \quad T_j = R_h^+, \end{cases}$$

und erhält

$$f' := \prod_{j=1}^{r} T_j'(f) = (1, y_1) + \sum_{i=2}^{l(f)} (x_i', y_i)$$

mit geeigneten $x_i' \in A_1^+$.

b) Falls etwa $x_2' \notin K1$, $x_2' = s1 + x_2''$, $x_2'' \neq 0$ nilpotent gilt, gibt es $D \in \mathscr{D}_1$ mit $Dx_2'' \neq 0$, da sonst $x_2'' \circ A_1^+$ echtes $\mathscr{D}_1$-invariantes Ideal von A_1^+ ist. Wegen $D(1) = 0$ hat dann $D \otimes 1(f') = \sum_{i=2}^{l(f)} (Dx_i', y_i) \neq 0$ kleinere Länge als f, ein Widerspruch. Also gilt $x_i' \in K1$, d.h. $l(f) = 1$, $(1, y_1) \in S$.

c) Ein gleiches Argument wie in a) liefert $(1, 1) \in S$, $S = A_1^+ \otimes A_2^+$. Als Folgerungen ergeben sich:

1) $(A_1 \otimes A_2)^+$ ist derivationseinfach, weil A_1^+, A_2^+ derivationseinfach sind. Nach [3] ist $(A_1 \otimes A_2)^+$ reduzierter Polynomring.

2) Seien A_1, A_2 einfach. Dann sind A_i^+ $\{L_h^-, h \in A_i\}$-einfach, also ist $(A_1 \otimes A_2)^+$ $\mathscr{D}$-einfach für $\mathscr{D} = \{L_{(h,1)}^-, h \in A_1\} \cup \{L_{(1,h)}^-, h \in A_2\}$. Es folgt die Einfachheit von $A_1 \otimes A_2$.

Da A_1 nodal ist, gibt es $f, g \in N_{A_1}$ mit $fg = 1 + n$, $n \in N_{A_1}$. Dann gilt $(f, 1), (g, 1) \in N_{A_1 \otimes A_2}$ und

$$(f, 1)(g, 1) = (1 + n, 1) \notin N_{A_1 \otimes A_2}.$$

Zum Beweis, daß $A_1 \otimes A_2$ flexibel ist, braucht wegen Char. $K \neq 2$ nur

$$[F, G \circ F] = [F, G] \circ F \qquad \text{für} \quad F, G \in A_1 \otimes A_2$$

gezeigt zu werden. Es gilt aber mit $F = \sum_i (f_{1i}, f_{2i})$, $G = (g_1, g_2)$

$$\begin{aligned}[F, G \circ F] &= \textstyle\sum_{i,j} [(f_{1i}, f_{2i}), (g_1 \circ f_{1j}, g_2 \circ f_{2j})] \\ &= \textstyle\sum_{i,j} ([f_{1i}, g_1 \circ f_{1j}], f_{2i} \circ g_2 \circ f_{2j}) + \sum_{i,j} (f_{1i} \circ g_1 \circ f_{1j}, [f_{2i}, g_2 \circ f_{2j}]) \\ &= [F, G] \circ F.\end{aligned}$$

In [6] ist gezeigt, daß die Multiplikation einer flexiblen Algebra B, für die B^+ reduzierter Polynomring ist, bereits von der Form (1) ist. Also gilt $A_1 \otimes A_2 \in \mathscr{K}$. Für die Dimension ergibt sich

$$\dim A_1 \otimes A_2 = (\dim A_1)(\dim A_2).$$

Seien (x_i) bzw. (y_j) Erzeugendensysteme von A_1 bzw. A_2 der Länge n_1 bzw. n_2. Dann wird durch $((x_i, 1)) \cup ((1, y_j))$ ein Erzeugendensystem der Länge $n_1 + n_2$ von $A_1 \otimes A_2$ gegeben.

Nach Lemma 1 ist $A_1 \otimes A_2$ genau dann Lie-zulässig, wenn die Jacobi-Identität für ein Erzeugendensystem gilt. Da der Kommutator $[(x_i, 1), (1, y_j)]$ verschwindet, ist $A_1 \otimes A_2$ genau dann Lie-zulässig, wenn A_1 und A_2 Lie-zulässig sind.

Sie $G_{A_1 \otimes A_2}$ das größte Ideal von $A_1 \otimes A_2$. Offenbar gilt

$$G_{A_1} \otimes A_2 + A_1 \otimes G_{A_2} \subset G_{A_1 \otimes A_2}.$$

Da in dem Diagramm

$$A_1 \otimes A_2 \to (A_1/G_{A_1}) \otimes (A_2/G_{A_2}) \to (A_1 \otimes A_2)/G_{A_1 \otimes A_2}$$

die letzten beiden Algebren einfach sind, sind diese beiden Algebren isomorph und die obigen Ideale sind sogar gleich.

Die Elemente von $A_1 \otimes A_2$, die mit allen Erzeugenden vertauschbar sind, bilden das Zentrum von $A_1 \otimes A_2$:

$0 = [\sum_j [(g_{1j}, g_{2j}), (x_i, 1)] = \sum_j ([g_{1j}, x_i], g_{2j}) \Rightarrow g_{1j} \in \text{Zentr.} A_1$. Entsprechendes gilt für A_2. Hieraus folgt $\text{Zentr.}(A_1 \otimes A_2) = (\text{Zentr. } A_1) \otimes (\text{Zentr. } A_2)$.

Für die Derivierte $(A_1 \otimes A_2)^{(1)}$ ergibt sich

$$(A_1 \otimes A_2)^{(1)} = A_1^{(1)} \otimes A_2 + A_1 \otimes A_2^{(1)}.$$

Denn es gilt etwa $([f_1, h_1], f_2) = [(f_1, f_2), (h_1, 1)]$.

Diese Konstruktion läßt sich ausdehnen auf das Produkt von endlich vielen solcher Algebren über dem gleichen Körper. Die Ergebnisse lassen sich entsprechend übertragen.

Diese Konstruktion läßt sich auf die Liealgebren von Block anwenden. Diese Liealgebren sind auf folgende Weise definiert: Sei

$$G = G_0 + G_1 + \cdots + G_m$$

direkte Summe elementarer p-Gruppen. Man wähle $\delta_i \in G_i$, $\delta_0 = 0$, $\delta_i \neq 0$ für $i \neq 0$ und setze $\delta = \sum_i \delta_i$.

Sei U eine eineindeutige Abbildung von G auf eine Basis eines Vektorraumes L/K mit $\dim L = |G|$. Dann definiert L mit der Multiplikation

$$U(a)\, U(b) := \sum_{i=0}^{m} f(a_i, b_i)\, U(a + b - \delta_i)$$

eine Algebra. Dabei sei f eine antisymmetrische biadditive Form auf $G \times G$ und a_i bzw. b_i die Komponente von a bzw. b in G_i. Unter geeigneten Voraussetzungen an f ist

$$L(G, \delta, f) := (L/U(0))K^{(1)}$$

eine einfache Liealgebra.

Nach Schafer [9] konstruiert man eine Algebra $A \in \mathscr{L}$, so daß A^- isomorph zu L ist. Bei dieser Konstruktion werden den Unteralgebren $L_k := (U(a), a \in G_k)$ von L Unteralgebren $A_k \in \mathscr{L}$ von A zugeordnet. Ein Vergleich ergibt, daß

$$A = \bigotimes_{k=0}^{m} A_k \qquad \text{und} \qquad L(G, \delta, f) \cong L\left(\bigotimes_{k=0}^{m} A_k\right), \qquad L_k \cong A_k^-$$

gilt. Nach einer Bemerkung von Block [1, S. 425] sind dann $L(A_k)$ isomorph zu Liealgebren L_0 bzw. L_δ von Albert und Frank. Damit sind die Blockschen Liealgebren in gewissen Sinne also auf diese Algebren zurückgeführt.

Es ist bekannt, daß das Hilfsmittel der Cartan-Zerlegung nicht so brauchbar ist wie im Fall der Charakteristik o. Block hat gezeigt [1], daß es zu jeder natürlichen Zahl q eine einfache Liealgebra gibt, die Cartan-Algebren zu q verschiedenen Dimensionen enthält. Da es im Fall der Charakteristik $\neq 0$ keine Spurform zu geben braucht, ist zu erwarten, daß Cartan-Algebren auch einfacher Lie-Algebren nicht abelsch zu sein brauchen.

SATZ 12. *Für jede Primzahl $p > 2$ und jede natürliche Zahl q gibt es eine einfache Lie-Algebra der Charakteristik p mit einer Cartan-Algebra $\tilde{H}_q$, so daß $\tilde{H}_q^{[q]} \neq 0$ gilt.*

Beweis.

1) Sei $A \in \mathscr{K}$ gegeben durch

$$A^+ = K[x_1, \dots, x_4], \qquad \dim A^+ = p^4$$

$$[x_1, x_2] = 1 \qquad [x_3, x_4] = x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1}$$

$$[x_1, x_3] = x_2^{p-1} \qquad [x_2, x_4] = x_1^{p-1}$$

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad \text{sonst.}$$

A ist einfach und Lie-zulässig: Zum Beweis der Lie-zulässigkeit zeigt man nach Lemma 1 die Jacobi-Identität für ein Erzeugendensystem. Mit der

Bezeichnung $(i, j, k) := [[x_i, x_j], x_k]$ gilt $(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2) = (1, 2, 4) = (2, 4, 1) = (4, 1, 2) = 0$

$$\begin{aligned}(1, 3, 4) + (3, 4, 1) + (4, 1, 3) &= [x_2^{p-1}, x_4] + [x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1}, x_1] + 0 \\ &= -x_2^{p-2} \circ x_1^{p-1} + x_1^{p-1} \circ x_2^{p-2} = 0, \\ (2, 3, 4) + (3, 4, 2) + (4, 2, 3) &= 0 + [x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1}, x_2] - [x_1^{p-1}, x_3] \\ &= -x_1^{p-2} \circ x_2^{p-1} + x_1^{p-2} \circ x_2^{p-1} = 0.\end{aligned}$$

Also ist die Jacobi-Identität für $x_1, \ldots, x_4$ erfüllt. A ist einfach: Jedes Ideal $S \neq \{0\}$ enthält $\prod_{i=1}^4 x_i^{p-1}$. Dann gilt

$$S \ni \operatorname{ad}^{p-1} x_2 \left(\prod_{i=1}^4 x_i^{p-1} \right) = (p-1)! \prod_{i=2}^4 x_i^{p-1}$$

und

$$S \ni \operatorname{ad}^{p-1} x_1 \left(\prod_{i=2}^4 x_i^{p-1} \right) = (p-1)!\, x_3^{p-1} \circ x_4^{p-1}.$$

Wegen $[x_1, x_3] = x_2^{p-1}$ gilt $\operatorname{ad}^p x_1(x_3) = (p-1)!$, S enthält

$$(\operatorname{ad}^p x_1)^{p-1} (x_3^{p-1} \circ x_4^{p-1}) = (p-1)!\, x_4^{p-1}.$$

Entsprechend gilt $-1 = (\operatorname{ad}^p x_2)^{p-1} (x_4^{p-1}) \in S$ und $S = A$. Auf diese Algebra wurde im vorigen Kapitel als Gegenbeispiel verwiesen.

2) Man betrachte die Fitting-O-Komponente H von $\operatorname{ad}_A x_1 \circ x_2$,

$$H = ((x_1 \circ x_2)^r \circ x_3{}^s \circ x_4{}^t,\ 0 \leqslant r, s, t \leqslant p - 1).$$

Aus der Multiplikationstabelle erkennt man

$$[x_3, x_4] = x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \subset [H, H] \subset x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ H,$$
$$H^{[2]} \subset x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1} \circ [H, H] \subset x_1^{2p-2} \circ x_2^{2p-2} \circ H = \{0\}$$

H ist nilpotent, also Cartan-Algebra von A.

3) $A_q := \bigotimes_1^q A$, $H_q := ((f_1, \ldots, f_q)/f_i \in H)$. A_q ist einfach und Lie-zulässig, weil A diese Eigenschaften besitzt.

a) Es wird gezeigt: $\operatorname{Norm}_{A_q}(H_q) = H_q$. ${}_rH$ sei die Fitting-O-Komponente von $\operatorname{ad}_{A_q}(1, \ldots, 1, x_1 \circ x_2, 1, \ldots, 1)$, wo $x_1 \circ x_2$ an der r-ten Stelle steht. Es gilt

$${}_rH = ((f_1, \ldots, f_q)/f_r \in H).$$

Also folgt $H_q = \bigcap_{r=1}^{q} {}_rH$. Da außerdem nach Definition von H_q $(x_1 \circ x_2, 1,\ldots, 1),\ldots, (1,\ldots, 1, x_1 \circ x_2) \in H_q$ gilt, folgt die Behauptung.

b) Es wird gezeigt: $H_q^{[q+1]} = \{0\}$. Man betrachte $H_q^{[r]}$, $0 \leqslant r \leqslant q$, $H_q^{[r]}$ wird als Vektorraum erzeugt von den q-Tupeln $(f_1,\ldots,f_q)$ mit $f_i \in H$, von denen r bereits in $H^{[1]}$ liegen. Dies folgt nach Induktion unter Berücksichtigung von $H^{[2]} = \{0\}$. Daher gilt

$$H_q^{[q]} = ((f_1,\ldots, f_q)/f_i \in H^{[1]}),$$

$$[H_q^{[q]}, H] = \Bigl(\sum_{1 \leqslant k \leqslant q} (f_1 \circ g_1,\ldots, [f_k, g_k],\ldots, f_q \circ g_q)\Big/ f_i \in H^{[1]}, g_i \in H\Bigr) = \{0\}$$

wegen $[f_k, g_k] \in H^{[2]} = \{0\}$. Also ist H_q nilpotent und damit Cartan-Algebra von A_q.

4) Man gehe über zu $L(A_q)$.

$$\tilde{H}_q := H_q \cap A_q^{(1)}/\text{Zentr. } A_q^{(1)}.$$

H_q ist nilpotente Unteralgebra von $L(A_q)$. Da $x_1 \circ x_2 = \frac{1}{4}[x_1^2, x_2^2]$ in $A^{(1)}$ liegt, gilt

$$(x_1 \circ x_2, 1,\ldots, 1),\ldots, (1,\ldots, 1, x_1 \circ x_2) \in A_q^{(1)}$$

und

$$(x_1 \circ x_2, 1,\ldots, 1) + \text{Zentr. } A_q^{(1)},\ldots, (1,\ldots, 1, x_1 \circ x_2) + \text{Zentr. } A_q^{(1)} \in \tilde{H}_q,$$

d.h. $\tilde{H}_q$ ist maximal und damit Cartan-Unteralgebra von $L(A_q)$. Zu zeigen ist: $\tilde{H}_q^{[q]} \neq \{0\}$. Da $[x_1 \circ x_3, x_2] = x_3$, $[x_1, x_2 \circ x_4] = x_4$ in $A^{(1)}$ liegen, gilt

$$F_i := (1,\ldots, 1, x_3, 1,\ldots, 1) + \text{Zentr. } A_q^{(1)} \in \tilde{H}_q, \qquad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

wo x_3 an der i-ten Stelle steht. Ebenso gilt

$$G_i := (x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1},\ldots, x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1}, x_4,\ldots, x_4) + \text{Zentr. } A_q^{(1)} \in \tilde{H}_q,$$

$0 \leqslant i \leqslant q$, wo an den ersten i Stellen $x_1 \circ x_2$ steht, sonst x_4. Wegen $x_1^{p-1} \circ x_2^{p-1}, x_4 \notin \text{Zentr. } A^{(1)}$ gilt $G_i \neq 0$. Es folgt

$$[F_i, G_{i-1}] = G_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant q), \qquad G_i \in \tilde{H}_q^{[i]},$$

also $\tilde{H}_q^{[q]} \neq \{0\}$. Q.E.D.

Die große Freiheit, die man bei der Definition der Multiplikation der Algebren von $\mathscr{L}$ besitzt, nutzen wir in der folgenden Konstruktion, die es ermöglicht, auch zu komplizierten Sachverhalten Beispiele (bzw. Gegenbeispiele) anzugeben.

Sei E eine endlich-dimensionale nichtabelsche Liealgebra über einem Körper der Charakteristik $p > 2$, und (e_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, eine Basis von E mit $e_1 \in EE$. Man bilde E in den Vektorraum $K[x_1, \ldots, x_n]$ ab durch

$$T: \begin{array}{l} E \to K[x_1, \ldots, x_n] \\ e_i \mapsto 1 + x_i . \end{array}$$

Auf diesem Vektorraum definieren wir eine Multiplikation durch

$$[x_i, x_j] := T(e_i e_j)$$

$$fg := f \circ g + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \frac{\partial g}{\partial x_j} \circ [x_i, x_j].$$

Wegen $e_1 \in EE$ gilt $(1 + x_1) \in [T(E), T(E)]$. Damit sind nicht alle Kommutatoren nilpotent, d.h. die so definierte Algebra $A(E, (e_i))$ liegt in $\mathscr{K}$.

Wegen $[x_i, x_j] = [1 + x_i, 1 + x_j]$ ist T ein Lie-Isomorphismus

$$E \to (1 + x_1, \ldots, 1 + x_n).$$

Dann erfüllt das Erzeugendensystem (x_i) von $A(E, (e_i))$ die Jacobi-Identität, also gilt $A(E, (e_i)) \in \mathscr{L}$. E ist isomorph eingebettet in $A^-(E, (e_i))$.

Diese Konstruktion hängt von der Wahl des Basis (e_i) ab. Falls E einfach ist, braucht $A(E, (e_i))$ nicht einfach zu sein. Umgekehrt folgt die Einfachheit von E nicht aus der Einfachheit von $A(E, (e_i))$.

Die Konstruktion läßt sich fortführen, wenn E die zusätzlichen Bedingungen $EE = E$ und Zentr. $E = \{0\}$ erfüllt. Zu $A(E, (e_i))$ gibt es eine Liealgebra $L(A(E, (e_i))) =: L(E, (e_i))$ von $\bar{\mathscr{L}}$. E wird durch T wegen $EE = E$ isomorph in $A(E, (e_i))^{(1)}$ eingebettet, wegen Zentr. $E = \{0\}$ gilt

$$T(E) \cap \text{Zentr.}\{A(E, (e_i))^{(1)}\} = \{0\}.$$

Damit liefert der kanonische Homomorphismus

$$A(E, (e_i))^{(1)} \to A(E, (e_i))^{(1)}/\text{Zentr.}\{A(E, (e_i))^{(1)}\} = L(E, (e_i))$$

einen Lie-Isomorphismus

$$E \to T(E) \to L(E, (e_i))$$

von E in $L(E, (e_i))$. Auf diese Weise lassen sich z.B. die klassischen Liealgebren in nichtklassische einbetten.

In der Literatur ist die Frage diskutiert worden, welche Lie-Algebren bei Char. p sich als Unteralgebren von Jacobson–Witt-Algebren darstellen lassen (vgl. dazu die Diskussion in [10]). Da eine Liealgebra von $\mathscr{L}$ nach Satz 7 isomorph zu $(\mathrm{ad}_A A)^{(1)}$ ist und diese nach S. 3 Unteralgebra von $\mathrm{Der}(A^{+})$ (d.h. einer Jacobson–Witt-Algebra) ist, liefert die Konstruktion

SATZ 13. *Sei E eine Liealgebra über einem Körper der Charakteristik $p > 2$ mit $EE = E$,* Zentr. $E = \{0\}$. *Dann läßt sich E in eine Jacobson–Witt-Algebra $W_{\dim E}$ einbetten.*

LITERATUR

1. R. BLOCK, New simple Lie algebras of prime characteristic, *Trans. Amer. Math. Soc.* **89** (1958), 421–449.
2. J. GOLDMAN, On a class of nodal noncommutative Jordan algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **128** (1967), 176–183.
3. L. R. HARPER, On differentiably simple algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** (1961), 63–72.
4. N. JACOBSON, Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, II, *Duke Math. J.* **10** (1943), 107–121.
5. L. A. KOKORIS, Nodal noncommutative Jordan algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 652–654.
6. L. A. KOKORIS, Nodal noncommutative Jordan algebras, *Can. J. Math.* **12** (1960), 488–492.
7. R. H. OEHMKE, Nodal noncommutative Jordan algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964), 416–431.
8. R. H. OEHMKE, On a class of Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 1107–1113.
9. R. D. SCHAFER, Nodal noncommutative Jordan algebras and simple Lie algebras of characteristic p, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 310–326.
10. G. B. SELIGMAN, "Modular Lie Algebras." Springer-Verlag, 1967.
11. H. ZASSENHAUS, Über Lie-sche Ringe mit Primzahlcharakteristik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **13** (1940), 1–100.
12. R. WILSON, Nonclassical simple Lie algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 987.